Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 18 — 15. Dezember 2022

Aufgabe 1: *(2 Punkte)* Zeige, dass eine absolut konvergente Reihe stets konvergiert, d.h. für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gilt die Implikation

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)* Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut und welche divergieren? Begründe die jeweiligen Antworten.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k^n}$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n n}$ für $x \in [-4, 4)$.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Für die Summanden $a_k = 1/k$ der (divergenten!) harmonischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

gilt doch

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} < 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit müsste die harmonische Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergieren, oder? Erkläre, warum sich das Quotientenkriterium nicht auf die harmonische Reihe anwenden lässt.

Ausgabedatum: 15. Dezember 2022 **Abgabetermin:** 19. Dezember 2022, 10:00 Uhr.